

21. DERIVACE FUNKCE (2)

Spočítejte derivaci následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$
2. $f(x) = \max\{\min\{\cos x, \frac{1}{2}\}, -\frac{1}{2}\}$
3. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$
4. $f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2}$
5. $f(x) = x^{(x^x)}$ pro $x > 0$
6. $f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}$
7. Sestrojte spojitou funkci $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ takovou, že $f([0, \infty))$ je otevřený interval.
8. Necht' funkce f je definována na jistém okolí B bodu 0 a existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in B$ platí $|f(x)| \leq |x|^{1+\varepsilon}$. Rozhodněte, zda potom platí $f'(0) = 0$.
9. Sestrojte funkci $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, která má na intervalu $[-1, 1]$ omezenou derivaci a neexistuje

$$\max\{f'(x) \mid x \in [-1, 1]\}.$$

NĚKTERÉ VÝSLEDKY A NÁVODY

2. Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbf{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

3. Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} 2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$,
- $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

4. Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbf{R}$ a je na $\mathbf{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

5. Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\log x + 1), \quad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} (x^{(x^x)})' &= (e^{x^x \log x})' = e^{x^x \log x} ((x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}) \\ &= x^{(x^x)} (x^x (\log x + 1) \log x + x^{x-1}), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

6. Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbf{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbf{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = 5, \\ f'_-(2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} 1 = 1, \\ f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = -3, \\ f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, nemá derivaci.